Klasse B12T5
3. Schulaufgabe aus der Mathematik
nachgeholt am 06.05.2011

Analysis

1.0 Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto x^2 \cdot \ln\left(\frac{x}{e}\right)$ in ihrer maximalen Definitionsmenge.

1.1 Geben Sie D_f an, berechnen Sie die Nullstelle der Funktion f und bestimmen Sie das Verhalten der Funktionswerte f(x) an den Rändern der Definitionsmenge. [6]

1.2 Ermitteln Sie Art und Koordinaten des relativen Extrempunkts sowie die Koordinaten des Wendepunktes und die Steigung m_W der Wendetangente. [13]
[mögliches Teilergebnis: $f'(x) = 2x \cdot \ln\left(\frac{x}{e}\right) + x$]

1.3 Zeichnen Sie mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse die Graphen von f für $0 < x \leq 3$ und den Graphen der Ableitungsfunktion f' für $0 < x \leq 2$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Beschreiben Sie, wo man im Schaubild den Wert m_W (vgl. 1.3) findet. [8]

1.4 Zeigen Sie, dass die Funktion $F_C: \mapsto \frac{1}{9}x^3 \cdot (3 \cdot \ln(x) - 4) + C$ mit $D_F = D_f$ und $C \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f ist. [5]

2.0 Die Gerade x = u mit 0 < x < 1, der Graph von f und der Graph von f' begrenzen ein vollständig im IV. Quadranten liegendes, endliches Flächenstück

2.1 Kennzeichnen dieses Flächenstück Sie für u = 0,5 im vorhandenen Koordinatensystem. [7]
Berechnen Sie zunächst die von u abhängige Maßzahl A(u) seines Flächeninhaltes.
Untersuchen Sie dann, ob der Grenzwert $\lim\limits_{u \to 0} A(u)$ existiert.
Hinweis: Der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0}\left(x^n \cdot \ln(x)\right) = 0$ für $n \in \mathbb{N}$ kann ohne weitere Berechnung verwendet werden.

Analytische Geometrie

3.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind der Punkt A(0;0;3) und die Punktmenge $B_k(1;\, 2k-1;\, 3k+1)$ mit $k \in \mathbb{R}$ gegeben.

3.1 Geben Sie die Gleichung der Geraden g an, auf der die Punkte B_k liegen. [5]
Ermitteln Sie, welcher der Punkte B_k dem Punkt A am nächsten liegt.

3.2 Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Koordinatenform, die durch den Punkt A und die Punkte B_k festgelegt wird. [3]
[Mögliches Ergebnis: E: $x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 6 = 0$]

3.3 Die Ebenen E und F: $x_2 + x_3 = 5$ schneiden sich in der Geraden s. [6]
Berechnen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s und den Schnittwinkel α der beiden Ebenen.
[Mögliches Teilergebnis: s: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 21 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$]

3.4 Gegeben sind nun zusätzlich die Ebenen $H_a: x_1 + 2ax_2 + x_3 + 2 = 0$ mit $a \in \mathbb{R}$. [5]
Sie ist offensichtlich nicht parallel zur Ebene E (vgl. 3.2) und zur Ebene F (vgl. 3.3).
Bestimmen Sie a so, dass die drei Ebenen keinen gemeinsamen Punkt besitzen.
Verdeutlichen Sie die gegenseitige Lage der drei Ebenen anhand einer Skizze.